# TEMA 7 JUEGOS REPETIDOS

## Juegos repetidos (c.7)

**1.** De forma implícita habíamos visto la posibilidad de juegos repetidos en las estrategias mixtas, pero ahora vamos a analizarlos con todo detalle. Los juegos de suma cero repetidos no tienen especial interés, pues no se abren nuevas posibilidades: la solución se repite también. Pero si el juego es de suma variable la solución al juego puede ser muy distinta a la de los juegos que hemos visto hasta ahora. Como en los juegos secuenciales, en los juegos repetidos el concepto central es el de equilibrio perfecto en subjuegos. Distinguiremos los juegos que se repiten un número finito de veces de los juegos que se repiten sin fin, porque ello afecta profundamente a las estrategias de los jugadores.

**2.** Para ilustrar cómo una mera repetición cambia la forma de un juego simple 2x2 se presenta la Figura 7.1. Se introducen nuevos conceptos: una *historia posible* es la línea que une dos matrices (hay 4), cada matriz es un *juego de una sola ronda o etapa*, y el conjunto de las cinco matrices es el *juego repetido*. Las estrategias para el juego repetido tienen ahora dos partes, dos indicaciones, una para el primer juego de una sola ronda y otra para el segundo. Hay 32 posibles estrategias para los dos jugadores en un caso tan sencillo como este (Figura 7.2), por lo que la forma normal completa del juego repetido debería tener 32 filas y columnas. Por ese motivo es preferible usar formas extensivas para estos juegos. Dado que las estrategias de los jugadores tienen que ser completas –contienen todos los pasos hasta acabar el juego- las ganancias que las deciden deben ser completas también. Pero aquí las ganancias están repartidas en sucesivos juegos de una sola ronda. Hay que sumarlas pues, pero dado que estas se suceden en el tiempo, la forma de sumar cantidades de momentos del tiempo distinto es mediante el *valor actualizado*. No es un problema porque el libro adopta supuestos que nos permiten calcular ese valor actualizado sumando las ganancias directamente y evitar la fórmula. Pero una vez sumadas, las promedia, de forma que las ganancias del *juego repetido* estén en la misma escala que la de los *juegos de una sola ronda* (p. 205).

**3.** Los juegos de suma cero que se repiten tienen poco interés. Se resuelven igual que un juego de suma cero de una sola ronda, cuyo resultado se repite también. La sucesión de equilibrios –en este caso siempre el mismo- es lo que se conoce como una *trayectoria de equilibrio*, y forma un equilibrio perfecto en subjuegos. El juego de Ventaja competitiva, Figura 2.3, es de suma cero y simétrico. Por tanto, la solución es el equilibrio de Nash, que es adoptar la nueva tecnología por parte de las dos empresas. La trayectoria de equilibrio del juego repetido consiste precisamente en que las dos empresas adopten la nueva tecnología en cada repetición. El juego de La batalla de las cadenas de televisión, Figura 2.1, es un juego de suma constante, pero asimétrico. Se puede convertir en un juego de suma cero, también asimétrico (Figura 2.2). La solución es un equilibrio de Nash de estrategias no dominadas. La trayectoria de equilibrio es esa misma solución repetida. En general, todo juego de suma cero repetido tiene una *trayectoria de equilibrio* que consiste en repetir la solución del juego de una sola ronda.

**4.** Con los juegos de suma variable la cosa puede empezar a complicarse, siempre que haya más de un equilibrio. Si sólo hay un equilibrio, será la solución del juego, y al repetirse éste se repetirá la solución, como en los juegos de suma cero (*Teorema de Selten*). El Dilema de los presos jugado dos veces sirve de ejemplo (Figuras 7.3 y 7.4). Otro ejemplo son las cuotas de la OPEP (epígrafe 7.5).

**5**. Lo realmente interesante del tema empieza con los juegos de suma variable con múltiples equilibrios, ya se repitan un número finito (epígrafe 7.5) o infinito (epígrafe 7.6) de veces. Veamos los primeros. Cuando un juego de suma variable con múltiples equilibrios se repite, *aparecen nuevos equilibrios perfectos en subjuegos*. El juego de Oportunidades de mercado, Figura 7.6, se emplea para ilustrarlo. Es un juego de suma variable pero simétrico. Ese juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras y un equilibrio en estrategias mixtas. En el juego de una sola ronda la solución sería ese equilibrio en estrategias mixtas, porque garantiza simetría en ganancias (criterio de justicia). Pero cuando el juego se repite *dos* veces surge otra posibilidad: alternar los dos equilibrios de Nash en estrategias puras, de manera que las ganancias medias son también simétricas. Hay otras muchas trayectorias de equilibrio que son equilibrios perfectos en subjuegos, pues contienen equilibrios de Nash, pero ofrecen ganancias asimétricas. Cuando el juego se repite *tres* veces aparecen más posibilidades aún, pues la trayectoria de equilibrio que garantiza simetría en ganancias y dominancia en ganancias pasa por adoptar como solución en la primera ronda una posición que no era un equilibrio (**A**, **A**). Por tanto, lo que no era un equilibrio de Nash pasa, gracias a la repetición, a formar parte del equilibrio perfecto en subjuegos. La *trayectoria* es un equilibrio porque si un jugador se aparta de ella acabará obteniendo un beneficio menor, una vez considerada la previsible respuesta de su adversario. Un aspecto interesante: esa posición (**A**, **A**) no se podría colocar al final, sino que tiene que estar al principio. Dado que no es un equilibrio de Nash, la promesa mutua de ir a ella por parte de ambos jugadores no es creíble. El que traicione al otro, eligiendo B, maximizará su ganancia. Si esto ocurre en la primera ronda, el traicionado –como demuestra el libro- acaba cobrándose su venganza. Lo mismo se aplica si el juego se repite más de tres veces: los jugadores irán a la posición (**A**, **A**) hasta las dos últimas rondas, en las que se alternarán los equilibrios de Nash. Las ganancias medias de ese juego repetido muchas veces se acercarán mucho a las de (**A**, **A**). No es una casualidad debida al ejemplo de Oportunidades de mercado, sino un resultado general, conocido como *teorema de la tradición oral* (folk theorem). Éste nos dice que *todos* los puntos del espacio mostrado en la Figura 7.8 se pueden alcanzar mediante una estrategia como la descrita (si el juego se repite muchas veces). Obviamente nos interesan unas ganancias lo más altas posibles, y en el caso de Oportunidad de mercado, simétricas, lo que nos lleva a (3, 3), que es alcanzable mediante el uso de (**A**, **A**) en todas las rondas, excepto las dos últimas. Esta solución no existe en un juego de una sola ronda: el único equilibrio simétrico en ganancias es en estrategias mixtas y ofrece (2, 2).

**6.** Aunque los juegos de suma variable repetidos un número finito de veces crean nuevas posibilidades, que pueden incluir ganancias medias antes no alcanzables, esto requería que en el juego de una sola ronda hubiera más de un equilibrio. Con los juegos que se repiten infinitas veces no se requiere eso, y *podemos acceder a nuevas posibilidades aunque en el juego original haya un solo equilibrio*. Tomemos el juego del Dilema del prisionero (Figura 7.3). El único equilibrio de Nash es (confesar, confesar), con un pago de (2, 2). Recordamos que había un resultado más eficiente que no era equilibrio de Nash, y que era (no confesar, no confesar), con un pago (3, 3). No es un equilibrio de Nash porque si uno de los prisioneros traiciona al otro, consigue los máximos beneficios y el traicionado los mínimos (4 y 0), lo que es un incentivo muy fuerte. Sin embargo, si el juego se repite infinitas veces la estrategia óptima para ambos jugadores es atenerse al resultado más eficiente, aunque no sea equilibrio de Nash, y amenazar al jugador que se desvíe con pasar eternamente al equilibrio de Nash, menos eficiente. Es lo que se conoce como *estrategia de disparador*. De esa forma conseguimos un resultado eficiente y simétrico en ganancias igual a (3, 3) que no era alcanzable en el juego de una ronda. En el juego infinitamente repetido esto es un equilibrio, pues ninguno de los jugadores puede ganar más desviándose de él. Se puede demostrar. Dado que los pagos deben actualizarse para poder sumarse, irán multiplicados por un factor de descuento $0<R<1$, y normalizados al multiplicarlos por $(1-R)$. Si se sigue la estrategia óptima cada jugador obtendrá con el juego un valor actualizado

$$u_1 = (1-R)\ [3 + 3R + 3R^2 + 3R^3 + \ldots]$$

$$u_1 = 3\ (1-R)\ [1 + R + R^2 + R^3 + \ldots]$$

$$u_1 = 3\ (1-R)\ /\ (1-R) = 3$$

Si un jugador se desvía de esta estrategia obtendrá durante un solo período 4 en vez de 3, pero cuando el otro jugador responda pasará a obtener 2 hasta el infinito. El mejor momento para hacerlo es al principio, porque el 4 que se gana con la traición no irá multiplicado por R. El valor actualizado sería

$$u_1 = (1-R)\ [4 + 2R + 2R^2 + 2R^3 + \ldots]$$

$$u_1 = (1-R)\ [4 - 2 + 2 + 2R + 2R^2 + 2R^3 + \ldots]$$

$$u_1 = (1-R)\ [2 + 2/(1-R)] = 4 - 2R$$

La estrategia que hemos señalado será un equilibrio si ofrece un resultado superior a la estrategia de la traición, y para ello deberá cumplirse que $3 > 4 - 2R$, que implica que $R > 0{,}5$. Sólo si el factor de descuento es ese, la estrategia de atenerse al óptimo paretiano en el juego de una sola ronda formará parte del equilibrio en el juego repetido.

Este es un resultado general, conocido como *teorema de la tradición oral* (folk theorem) para juegos repetidos infinitas veces (p. 226): todos los resultados del juego de una sola ronda –todos- son alcanzables mediante una estrategia del disparador, siempre que los factores de descuento estén suficientemente cerca de 1. Cada caso tendrá un valor distinto de R que se considera "suficientemente" cercano a 1, pero cuanto más cerca esté R de 1 más seguros estaremos de que sea cual sea el juego que tengamos entre manos estaremos cumpliendo con lo especificado en el teorema.

**7.** El epígrafe 7.7 es sólo una aplicación práctica de lo estudiado, y el 7.8 un comentario de un caso real ilustrativo.

Muchas de las relaciones estratégicas en nuestra vida diaria ocurren más de una vez.; en muchos negocios, repetir los clientes es esencial para su rentabilidad.

Los juegos repetidos son aquellos en los que los mismos jugadores se encuentran más de una vez.

La repetición de un juego de suma cero no resulta nuevo desde el punto de vista estratégico.

En los juegos de suma variable, la repetición ayuda a obtener nuevos resultados, algunos más atractivos que los que se juegan una vez.

Los juegos repetidos captan un aspecto importante de lo que son las relaciones duraderas.

Los juegos repetidos son atractivos porque tienen muchas más estrategias que los que se juegan solo una vez.

La repetición de un juego de mercado de Cournot no es suficiente para que una industria maximice sus beneficios.

La repetición un número finito de veces de un juego de suma variable con múltiples equilibrios crea muchas oportunidades de nuevas ganancias.

El teorema de **juegos repetidos un número finito de veces**, de tradición oral (Folk Theorem) describe los equilibrios perfectos en subjuegos de un juego repetido, mostrando como la repetición finita nos puede acercar a un resultado eficiente.

Los juegos **repetidos un número infinito de veces,** relevantes para las relaciones entre empresas; donde la empresa se muestra como entidad con vida infinita.

**7.1.-** **<u>Estrategias y ganancias en juegos que se juegan dos veces:</u>**

Consideremos un juego genérico 2x2 en forma normal, dos jugadores con dos estrategias cada uno, pero el juego se jugará dos veces.

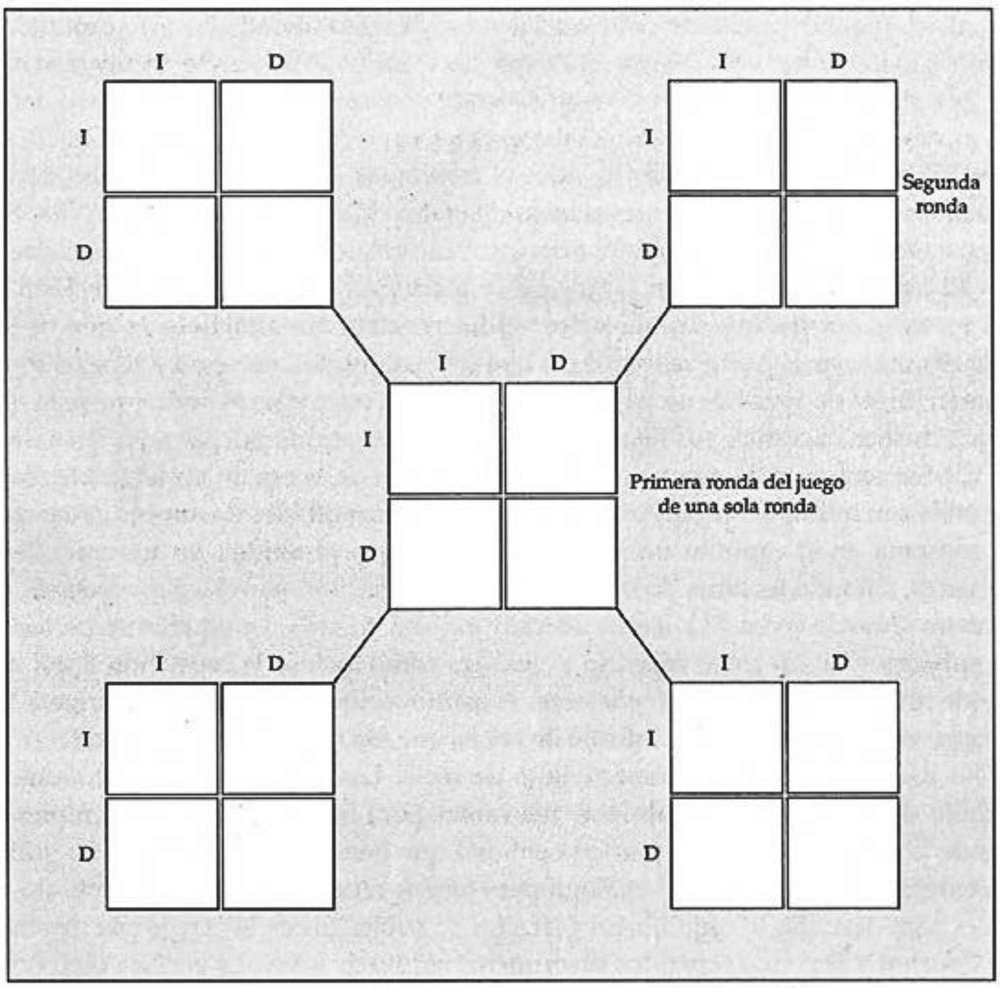


**Figura 7.1. Un juego 2 × 2 jugado dos veces.**

Existen cuatro resultados posibles en la primera ronda del juego; cuatro historias posibles que conducen a una segunda ronda (líneas que unen la primera y la segunda ronda).

El juego que se repite cada vez se denomina juego de una sola ronda y el que consiste en todas las rondas del juego de etapa se llama juego repetido.

En la figura cada una de las cinco matrices en un ejemplo de juego de una ronda y el conjunto entero es el juego repetido.

Una estrategia será un plan de juego completo: sean derecha (D) e izquierda (I) las dos estrategias de una sola ronda→una estrategia describe lo que hace un jugador en la primera repetición, D o I, y luego lo que hace el jugador en segunda ronda en cada una de las posibles historias que conducen a ella.

Como existen cuatro historias posibles y dos opciones por historia, hay $2^4$ opciones posibles en esta etapa.

Multiplicando, tendremos (2)( $2^4$)=32 estrategias para el juego repetido.

| Número Estrategia | Ronda 1 | Después de $(I, I)$ | Después de $(I, D)$ | Después de $(D, I)$ | Después de $(D, D)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | I | I | I | I | I |
| 2 | I | I | I | I | D |
| 3 | I | I | I | D | I |
| 4 | I | I | I | D | D |
| 5 | I | I | D | I | I |
| 6 | I | I | D | I | D |
| 7 | I | I | D | D | I |
| 8 | I | I | D | D | D |
| 9 | I | D | I | I | I |
| 10 | I | D | I | I | D |
| 11 | I | D | I | D | I |
| 12 | I | D | I | D | D |
| 13 | I | D | D | I | I |
| 14 | I | D | D | I | D |
| 15 | I | D | D | D | I |
| 16 | I | D | D | D | D |
| 17 | D | I | I | I | I |
| 18 | D | I | I | I | D |
| 19 | D | I | I | D | I |
| 20 | D | I | I | D | D |
| 21 | D | I | D | I | I |
| 22 | D | I | D | I | D |
| 23 | D | I | D | D | I |
| 24 | D | I | D | D | D |
| 25 | D | D | I | I | I |
| 26 | D | D | I | I | D |
| 27 | D | D | I | D | I |
| 28 | D | D | I | D | D |
| 29 | D | D | D | I | I |
| 30 | D | D | D | I | D |
| 31 | D | D | D | D | I |
| 32 | D | D | D | D | D |

**Figura 7.2. Estrategias para jugar un juego $2 \times 2$ dos veces.**

Esa tabla recoge las posibilidades al alcance de cada uno de los dos jugadores. Imagine que a cada uno de los jugadores se le da un ejemplar de esa tabla, y que cada uno de ellos tiene que escoger una estrategia que comprende dos elecciones. Cada jugador escoge la suya al principio del juego, sin saber lo que escogerá el otro. Apunta el número de la estrategia y ya está. Ese número contiene todas las instrucciones necesarias para jugar el juego.

Imagine que el jugador 1 escoge la estrategia 8 y el jugador 2 escoge la estrategia 23.

- El jugador 1 decide optar por I en la primera ronda. El jugador 2 decide optar por D la primera ronda. Tenemos por tanto (I,D) en la primera ronda.
- El jugador 1 eligió la estrategia 8, y esta implica que cuando la primera ronda es (I,D) automáticamente se selecciona D en la segunda ronda.
- El jugador 2 eligió la estrategia 23, y esta establece que cuando en la primera ronda tenemos (I,D) en la segunda se selecciona automáticamente D.
- Por tanto, en la segunda ronda tendremos (D,D).
- Esas dos estrategias nos llevan por tanto a (I,D) en primera ronda y (D,D) en segunda.
- Ese es el resultado del juego. La tabla 7.2 contiene todas las posibilidades y cada jugador escoge una y se atiene a ella.

Algunas de estas estrategias son importantes y reciben nombres especiales.

- Estrategia incondicional: la 1, la 32
- Estrategia de rotación: la 16
- Estrategia de rotación inversa: la 17
- Estrategia de disparador: la 6, la 27. Útil cuando se quiere que el oponente solo utilice una estrategia pura en el juego de una etapa.

Para escribir la forma normal de un juego 2x2 jugado dos veces→matriz 32x32. Por ello, se analizan mejor con la forma extensiva, ya que la repetición crea subjuegos que se pueden analizar por separado.

Las ganancias en juegos repetidos son razonablemente fáciles; se suman las ganancias de cada ronda, en términos de valor presente (un dólar hoy tiene más valor que un dólar mañana).

Sea R el factor descuento de un número entre 0 y 1, donde:

R=0→el futuro no tiene valor.

R=1→el futuro es tan importante como el presente.

Una ganancia de \$1 dentro de T periodos tiene hoy un valor de $\$1R^t$

Sea u1(t) la ganancia de j1 en la repetición t; entonces, el valor presente para j1 de un juego que se juega dos veces, será:

$$u_1 = u_1(0) + Ru_1(1)$$

donde el juego comienza hoy, en el momento t=0.

El valor presente para el j2 de un juego que se juega dos veces, u2, será:

**u2=u2(0)+ Ru2(1)**

Una interpretación del valor descuento, R, como factor descuento en el tiempo: si r es la tasa de descuento (tipo interés en el mercado), el factor de descuento R satisface:

$$R = \frac{1}{(1 + r)}$$

Un tipo de interés del 10% (r=0,1) implica un factor de descuento: 1/1,1 o bien 10/11

Con este factor de descuento, un dólar dentro de 10 periodo tiene un valor hoy de solo:

**$(10/11)^{10}$=$0,38**

Otra interpretación de R es la probabilidad de continuación, de que el juego se juegue otra vez:

Si un jugador no sabe a ciencia cierta si el juego se continuará o no, se valorará un futuro incierto menos que un presente cierto, obteniendo la misma expresión para u1.

En todos los juegos repetidos un número finito de veces, fijaremos R=1→o el lapso de tiempo entre repeticiones es muy corto o el juego de una etapa se repetirá con toda certeza.

Además se normalizarán las ganancias para que tengan la misma magnitud las de un juego repetido que las del juego de una sola ronda→dividiendo por el número de veces que se juega el juego de una sola ronda T.

Para un juego que se juega dos veces, la utilidad del jugador i en una sola ronda que se juega dos vece, ui:

$$u_i = \left(\frac{1}{2}\right) [u_i(0) + u_i(1)]$$

**7.2.- <u>Juegos de suma cero con dos jugadores que se juegan más una vez:</u>**

Resolución fácil; cuando se repite un juego de suma cero no se crea valor.

Si cuando se juega una vez los jugadores no ganan nada, cuando continúan con la misma estrategia, sea cual sea el número de veces, los jugadores continuarán sin ganar nada.

Si j1 puede asegurarse una ganancia positiva a expensas de j2, j1 podrá asegurarse dicha ganancia siempre que se repita el juego.

Si dos empresas juegan a Ventaja Competitiva (VC) dos veces, la primera vez que juegan la innovación es una unidad de RM; la segunda es una unidad de tomografía por emisión de positrones (TEP)→ e1 tiene una estrategia dominante para jugar VC dos veces:

| | |
|---|---|
| primera ronda: | la empresa 1 adopta la nueva tecnología |
| segunda ronda: | después de cualquier posible historia, la empresa 1 adopta la nueva tecnología |

Esta también es una estrategia dominante para u2. Una trayectoria de equilibrio de un juego repetido es lo que se observa en cada periodo cuando los jugadores siguen un determinado equilibrio.

Cada empresa adopta la nueva tecnología y obtiene una ganancia de 0 cada periodo; igual que en el equilibrio de juego de etapa, donde u1=u2=0, en el juego repetido obtenemos:

$$u_1 = \frac{(0+0)}{2} = 0$$

Lo mismo para u2: **u2= (0+0)/2=0**

Adoptar la nueva tecnología este año es una estrategia dominante; pues así lo será todos los años.

Si dos cadenas juegan a batalla de las cadenas de tv dos veces, como emiten sus propios programas cada semana, juegan a este juego unas 52 veces al año.

Cada semana, c1 goza de una ventaja del 4% en cuota de audiencia sobre c2, si juega su estrategia de equilibrio, emitir una serie).

La c1 continuará utilizando su estrategia ganadora.

primera ronda: Emitir una serie
segunda ronda: después de cualquier posible historia, Emitir una serie

La e2 emplea una estrategia similar, reemplazando "serie" por "deportes". Ahora la ventaja media en cuota de audiencia, al cabo de unas semanas, es del 4% a favor de c1.

La trayectoria de equilibrio de la Batalla de las cadenas de tv repetida dos veces muestra a e1 emitiendo una serie cada periodo y e2 haciendo deportes cada periodo.

Se trata de un equilibrio perfecto en subjuegos (los cuatro) que aparecen en la segunda ronda.

No pasa nada cuando se repite un juego de suma cero con dos jugadores→siempre se obtiene el mismo comportamiento y el mismo resultado.

Es más interesante cuando el juego que se repite es de suma variable, aunque depende de cuantos equilibrios tenga el juego de una sola ronda.

### 7.3.- <u>Juegos de suma variable con un único equilibrio jugados dos veces:</u>

La repetición de un juego de suma variable exige credibilidad→valiosa relación entre jugadores.

Los juegos repetidos tienen una rica estructura de subjuegos→ la perfección en los mismos tendrá papel determinante en la solución.

Que la repetición añada valor al juego depende de cuantos equilibrios tenga el juego en una sola ronda → si tiene solo un equilibrio, la repetición no tendrá más interés que en juegos de suma cero.

El dilema de presos jugado dos veces: su único equilibrio perfecto hace que cada jugador confiese en cada subjuego. Lo comprobamos en la inducción hacia atrás. En cada subjuego final de los cuatro existentes, hay un equilibrio (confesar, confesar)→ cada jugador confiesa en cada subjuego.

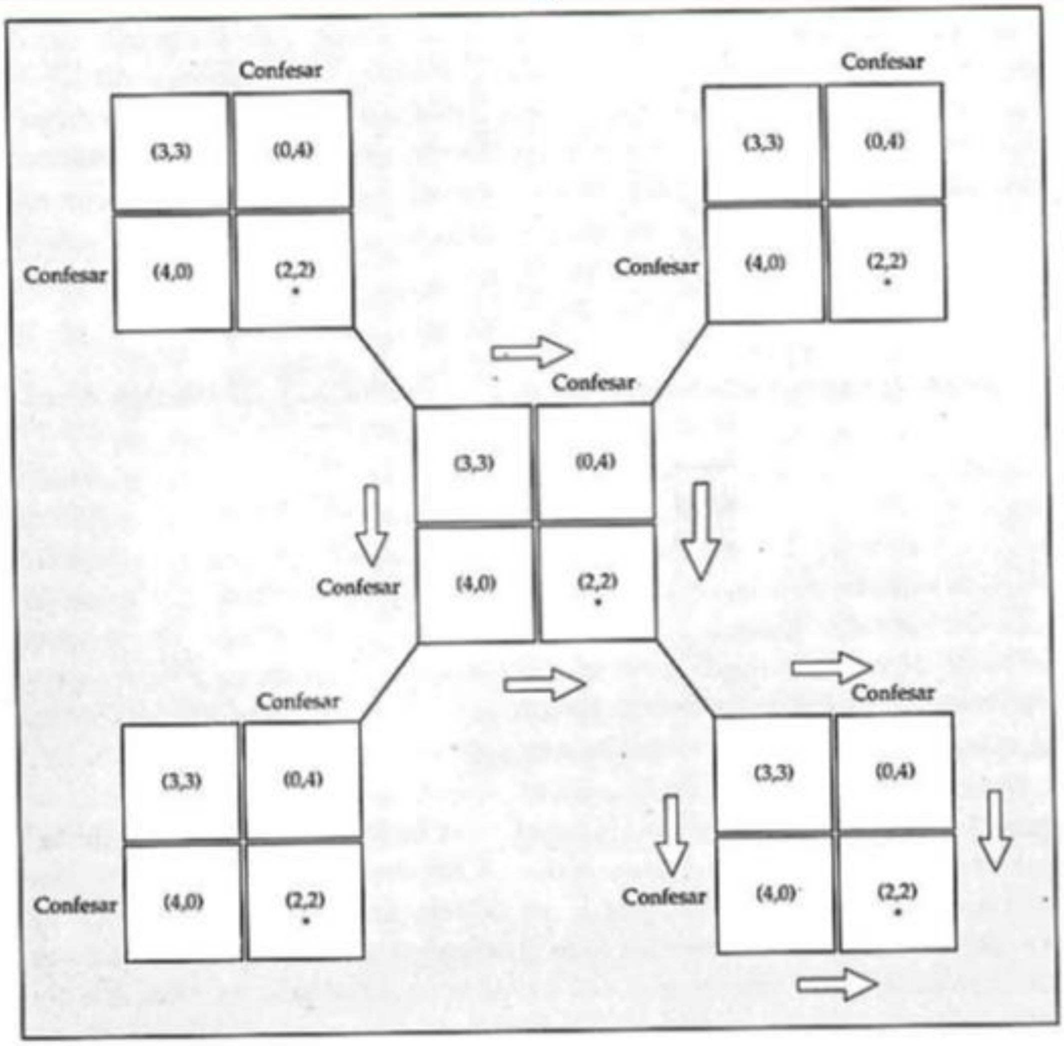


**Figura 7.3. Dilema de los presos jugado dos veces.**

Esto nos lleva a la primera ronda, con las ganancias del equilibrio de los subjuegos (2, 2) añadido a la ganancia de cada jugador→ en la primera ronda existe de nuevo un único equilibrio en el que cada jugador confiesa.

La ganancia total en las dos repeticiones es 4 para cada jugador, lo que da una ganancia media de 4/2=2 por periodo.

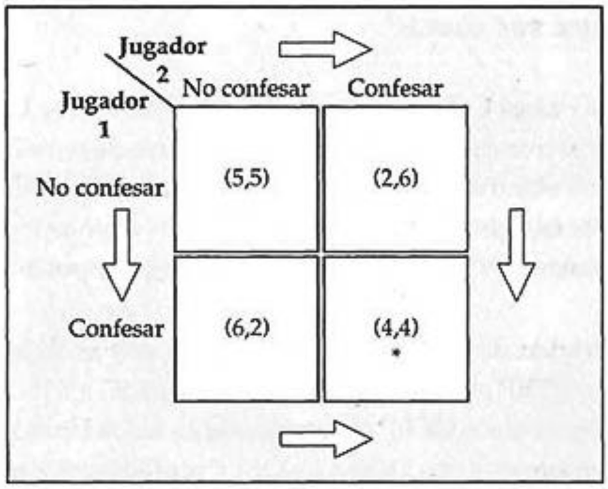


**Figura 7.4. Dilema de los presos, primera ronda, después de inducción hacia atrás.**

El plan de juego completo para cada jugador es la estrategia:

confesar en el primer periodo, y después de cualquier posible historia

La falta de credibilidad impide que los presos alcancen mejor resultado que el del equilibrio del juego de una sola ronda.

La promesa de no confesar en el segundo periodo es lo que haría falta para obtener ganancias más altas, pero no pasa el filtro de la credibilidad.

**Teorema de Selten:** Si un juego con un único equilibrio se repite un número finito de veces, su solución es que cada vez se juegue ese equilibrio→ el resultado demostrado para un juego 2x2 con un único equilibrio jugado dos veces es cierto para cualquier juego jugado un número finito de veces.

Pueden existir otros equilibrios, pero tendrán problema de credibilidad.

Un equilibrio imperfecto típico en el dilema de presos jugado dos veces:

- Primera ronda: confesar.
- Segunda ronda: confesar si al menos un jugador ha confesado en primero ronda, y no confesar en caso contrario.

cuando cada jugador utiliza esta estrategia, produce la misma trayectoria de equilibrio y ganancias que el equilibrio perfecto en subjuegos.

Su imperfección aparece solo en el subjuego al que se llega después de la historia (no confesar, no confesar) de la primera ronda.

Como según el plan de acción completo de cada jugador en el primer periodo se jugará (confesar, confesar), la historia que activa la imperfección no ocurre.

Si ambos jugadores sin darse cuenta no confesaron en el primer periodo, se enfrentarán a un problema de credibilidad en el segundo→ su estrategia les dirá que no confiesen pero obtendrían una ganancia más alta si confesaran.

El mismo principio funciona en juegos de mercado de Cournot o Bertrand repetidos un número finito de veces, con un único equilibrio de Cournot o de Bertrand.

Un ejemplo de juego de mercado de Cournot repetido es el mercado mundial del petróleo y la OPEP.

**7.4.-<u>La OPEP reduce sus cuotas:</u>**

La OPEP y sus aliados pretendían elevar el precio mundial del petróleo por encima del coste marginal. No lo pudo conseguir hasta 1967, cuando EEUU dejó de ser exportador de petróleo.

1973, con la guerra del Yom Kippur, y después con el embargo al petróleo de los EEUU, la OPEP pudo subir el precio del barril hasta niveles récord.

La OPEP como cualquier cartel se enfrentaba a mantener el precio pactado; como era superior al coste marginal, cada país tenía incentivos para producir y vender más, ganando más→ un precio cercano al de monopolio no es un equilibrio del juego de una ronda.

OPEP decidió mantener el precio instaurando un sistema de cuotas para sus 13 miembros; Arabia Saudí consiguió la cuota mayor y Ecuador la menor. Irán e Irak, grandes enemigos obtuvieron idéntica cuota.

El objetivo de precio OPEP, total de las cuotas ofrecidas a los compradores, $\mathbf{P^{+}= \$30}$

El precio observado en el mercado, correspondiente al equilibrio de Cournot del juego de una sola ronda (one shot game): $\mathbf{P^{*}= \$20}$

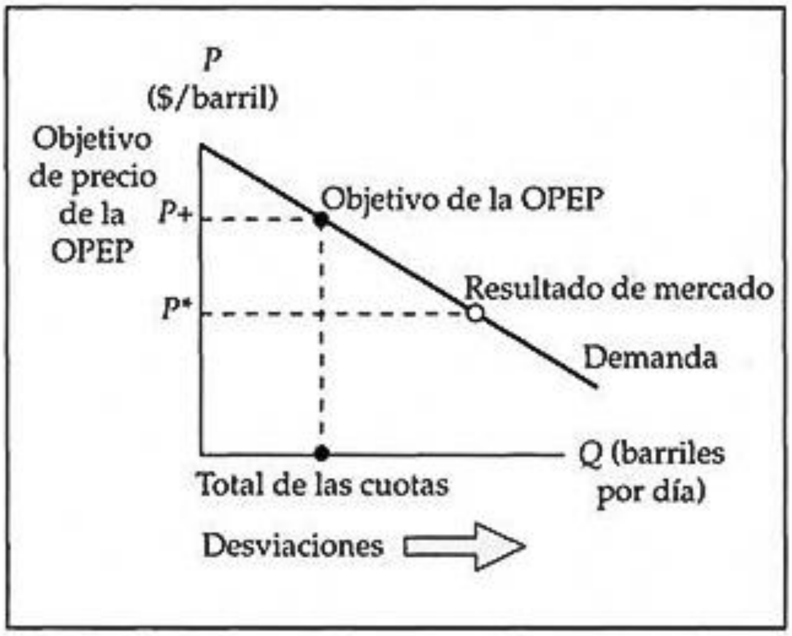


**Figura 7.5. Cuotas de la OPEP.**

Eran conscientes de que el incumplimiento del pacto por algún país sería nefasto para los beneficios del cartel. Pero todos los miembros seguían excediendo su cuota, además algunos países empezaron a quedar sin petróleo (es finito).

Dada la estructura de demanda mundial de petróleo importado, solo existe un único equilibrio del juego de etapa→ el Teorema de Selten actúa con fuerza, y el único equilibrio perfecto en subjuegos del juego repetido hace que todos incumplan sus cuotas en todos los periodos; lo que hicieron.

Además otros países en sus prospecciones encontraron petróleo pudiendo ampliarse la oferta mundial de petróleo→ el precio volvió a niveles de 1973.

Las cuotas perdieron su fuerza y sentido, abandonándolas en 1993

## 7.5.-<u>Juegos de suma variable con múltiples equilibrios jugados un número finito de veces:</u>

Jugar el Dilema de presos o un juego de mercado de Cournot un número finito de veces no ayuda en promedio a los jugadores más que jugarlo una sola vez.

Cuando un juego de una sola ronda tiene múltiples equilibrios, la repetición del juego abre muchas posibilidades de ganancias nuevas e interesantes→ perfectas en subjuegos. Pasan la credibilidad.

Jugando a Oportunidad de mercado, en plural: Dos jugadores, e1 y e2, y dos oportunidades de mercado, A y B.

El juego en una sola ronda es:

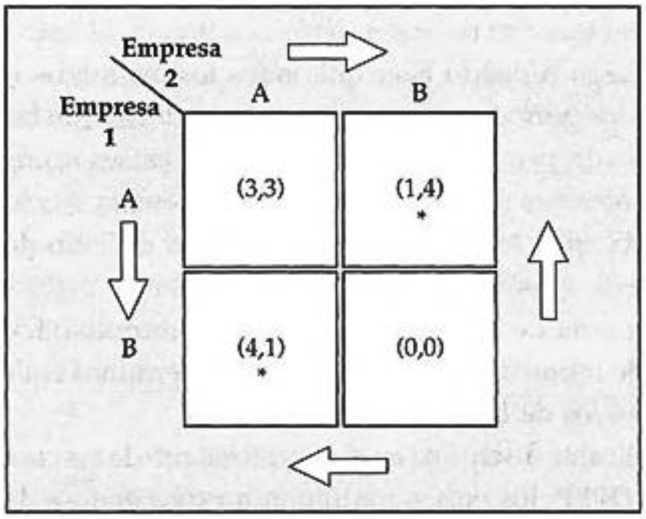


**Figura 7.6. Oportunidades de mercado, en una sola ronda.**

Si ambas empresas se aprovechan de la oportunidad de mercado A, cada una obtiene ganancia 3; pero si cualquiera abandona la oportunidad A y aprovecha B, obtendrá mayor ganancia, 4. Pero en la oportunidad B solo hay sitio para una empresa; si entran las dos en B la ganancia será cero.

*La versión en una sola ronda tiene dos equilibrios en estrategias puras muy diferentes, (A, B) y (B, A) con vectores de ganancias (4, 1) y (1, 4).*

*También existe un equilibrio en estrategias mixtas, la e1 va a la oportunidad A con probabilidad de ½ y a la B con idéntica probabilidad.*

*La e2 emplea igual estrategia mixta.*

*El valor esperado de esta estrategia mixta en equilibrio para cada empresa es de 2.*

*Estas ganancia del juego de una sola ronda se recogen en el diagrama siguiente:*

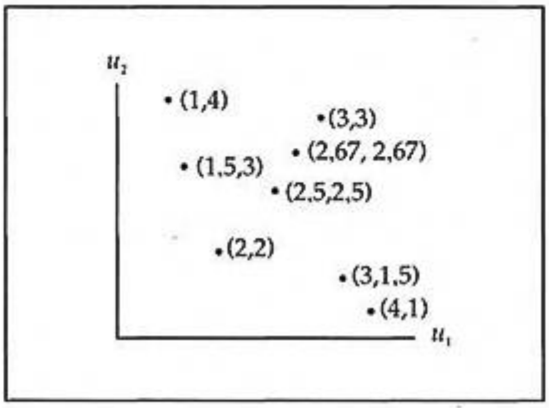


**Figura 7.7. Oportunidades de mercado, jugado dos o tres veces, posibilidades de utilidad.**

Cada empresa prefiere disponer de la oportunidad B para ella sola.

Si se juega Oportunidad de mercado dos veces, se puede producir una rotación→cada empresa puede ocupar ella sola la oportunidad B una vez.

Un equilibrio perfecto en subjuegos que envía a la e1 a la oportunidad B en la primera ronda y a la e2 en la segunda ronda:

El plan de acción completo de e1 es:

primera ronda: ir a B

segunda ronda: después de cualquier historia posible, ir a A

El plan de acción completo de e2 es:

primera ronda: ir a A

segunda ronda: después de cualquier historia posible, ir a B

Estas estrategias forman un equilibrio perfecto en subjuegos pues tienen un equilibrio en cada subjuego.

La trayectoria de equilibrio para estas estrategias es (B, A) primero, seguida de (A, B)→ esta rotación produce unas ganancias medias en el juego repetido de (5/2, 5/2). Podríamos hacer lo mismo con e2 que va a oportunidad B, siendo también equilibrio perfecto y con iguales ganancias.

Al repetir el juego no perdemos ninguno de los vectores de ganancias factibles; los equilibrios perfecto en subjuegos se mantendrán aunque deberemos jugar dos veces seguidas el mismo equilibrio de juego.

Las estrategias son incondicionales y utilizando las apropiada podemos alcanzar la trayectoria de equilibrio (A, B) seguido de (B, A) y la secuencia del equilibrio en estrategias mixtas en el que cada empresa tiene iguales probabilidades cada periodo de ocupar cualquiera de las oportunidades de mercado.

También se podría alternar entre estrategias puras del juego en una ronda y el equilibrio en mixtas.

Jugar a Oportunidad de mercado dos veces dobla el número de posibilidades de utilidad alcanzadas por el equilibrio perfecto en subjuegos.

Si lo jugamos tres veces obtenemos una posibilidad nueva, además de las repetición incondicional del equilibrio de juego de una ronda y la alternancia entre los equilibrios del juego de una ronda→ nuevo equilibrio.

La trayectoria del equilibrio: e1 y e2 van a oportunidad A en el primer periodo; en los periodos 2 y 3 alternarán entre las dos oportunidades de mercado. Ahora que ambas empresas vayan a la oportunidad A forma parte de un equilibrio en el juego repetido (en el juego de una ronda no era equilibrio).

El vector de ganancias medias de cada empresa en esta trayectoria de equilibrio domina a cualquier otro equilibrio simétrico de Oportunidad de mercado jugado tres veces:

$$u_1 = u_2 = \frac{(3+1+4)}{3} = 2{,}67$$

Para conseguir la trayectoria de equilibrio (A, A) seguido de (A, B) y de (B, A) se utilizan las siguientes estrategias:

Para la e1, la estrategia es:

primera ronda: ir a A
segunda ronda: ir a A si la historia es (A,A) o (B,B)
e ir a B incondicionalmente en la ronda 3;
ir a B si la historia es (A,B) e ir a B incondicionalmente en la ronda 3;
ir a A si la historia es (B,A) e ir a A incondicionalmente en la ronda 3

Para la e2, la estrategia es:

primera ronda: ir a A
segunda ronda: ir a B si la historia es (A,A) o (B,B) e ir a A incondicionalmente en la ronda 3;
ir a A si la historia es (A,B) e ir a A incondicionalmente en la ronda 3;
ir a B si la historia es (B,A) e ir a B incondicionalmente en la ronda 3

El resultado de estas estrategias: la trayectoria de equilibrio es (A, A)→(A, B)→(B, A). En ésta, la e1 obtiene la ganancia media de:

$$u_1 = \frac{(3+1+4)}{3} = 2{,}67$$

y la e2, de

$$u_2 = \frac{(3+4+1)}{3} = 2{,}67$$

Si la e1 ocupara B en el primer periodo, e2 se ciñe a su plan de acción completo en este experimento, la historia posible en la segunda ronda es (B, A). Si (B, A) es la historia posible, en la segunda ronda la e1 va a A y e2 va a B, generando un vector de ganancias en la segunda ronda de (1, 4) que se repite en la tercera ronda.

Si la e1 se desvía de la estrategia que proporciona una ganancia media de 2,67, ocupando la oportunidad B en la primera ronda, obtendrá una ganancia media de:

$$u_1 = \frac{(4+1+1)}{3} = 2 < 2.67$$

Por lo que a e1 no le resulta rentable su desviación, luego es un equilibrio para e1.

Este par de estrategias es perfecto en subjuegos y el vector de ganancias (2, 67, 2,67) puede incluirse en la figura 7.7.

Suponiendo que jugamos a Oportunidades de mercado 101 veces, en vez de tres→ enviamos a ambas empresas a la oportunidad A los 99 primeros periodos y que después se alternen en los dos últimos periodos. Lo que es una trayectoria de equilibrio perfecto en subjuegos; además nos acercamos mucho a las ganancias medias (3, 3):

$$\frac{[99(3,3)+(4,1)+(1,4)]}{101} = (2{,}99, 2{,}99)$$

Se trata de un resultado general, no ocurre por casualidad.

Sea wi la peor ganancia en equilibrio para el jugador i en el juego de una sola ronda y sea w el vector de estas ganancias→ una ganancia tiene racionalidad individual si un jugador se puede asegurar esa ganancia por sí mismo, con independencia de lo que hagan los oponentes.

**<u>Teorema de tradición oral</u>** para juegos de dos jugadores repetidos un número finito de veces: La repetición crea equilibrios buenos en el caso de juegos de una sola ronda con un único equilibrio.

Suponiendo un juego repetido un número finito de veces con un vector de ganancias en un equilibrio del juego de una sola ronda que domina en ganancias a w→todos los vectores de ganancias factibles e individualmente racionales pueden alcanzarse en el límite como ganancias medias de equilibrios perfectos en subjuegos.

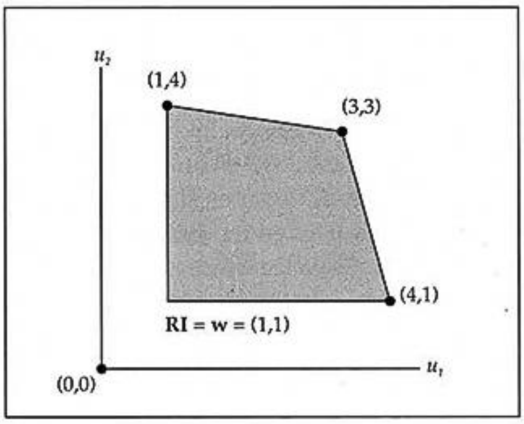


**Figura 7.8. Teorema de tradición oral: Oportunidades de mercado jugado un número finito de veces.**

Cada empresa puede asegurarse por si una ganancia de al menos 1 yendo a la oportunidad A, por lo que el vector de referencia de racionalidad individual, RI, es:

$$\mathbf{RI} = (1, 1)$$

La peor ganancia en equilibrio para el j1 en el juego de una sola ronda se alcanza en el equilibrio (A, B) y es igual a 1 y para el j2 se alcanza en (B, A) y es igual a 1; por lo tanto:

$$\mathbf{w} = (1, 1) = \mathbf{RI}$$

El equilibrio en estrategias mixtas que proporciona una ganancia de (2, 2) domina en ganancias a w.

Las ganancias factibles incluyen las entradas (1, 4), (4, 1) y (3, 3) de la matriz.

También son factibles las ganancias que hay en las rectas que conectan estos tres puntos y los puntos por debajo de estas rectas.

Combinando la racionalidad individual y la factibilidad, obtenemos un cuadrilátero (fig 7.8)

Con las suficientes repeticiones nos podemos situar tan cerca como queramos del vector (3, 3) utilizando equilibrios perfectos en subjuegos.

La repetición crea nuevos equilibrios y nuevos problemas,

El mejor equilibrio para e1 es jugar (B, A) cada vez y el mejor para e2 es jugar (A, B) cada vez.

El problema estratégico al que se enfrentan las empresas cambian de nivel por la repetición del juego; las empresas no se pelean ahora por qué empresa se queda con la oportunidad B, sino por qué equilibrio jugar en el juego repetido.

La teoría de juegos puede mostrar posibles soluciones pero no la respuesta por sí sola.

Buscamos un equilibrio simétrico en ganancias, en el que los dos jugadores ganan lo mismo.

Tiene que ser así porque el juego es simétrico.

Los equilibrios de Nash son situaciones tales que, una vez el jugador observa las elecciones del oponente, se siente satisfecho con las elegidas por él.

El juego de la Figura 7.6

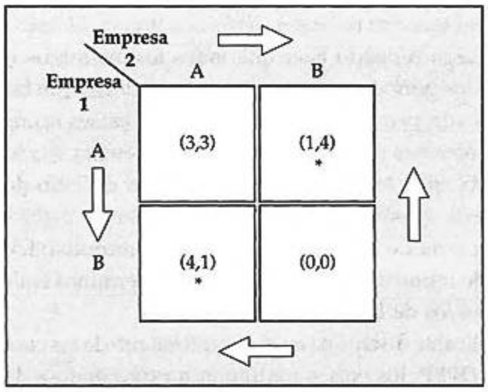


Figura 7.6. Oportunidades de mercado, en una sola ronda.

tiene dos posibles equilibrios de Nash.

La casilla (A,A) no es un equilibrio porque una vez el juego ha terminado los jugadores se arrepienten de lo que ha sido su elección. Piensan, con razón, que si hubieran elegido B en vez de A habrían ganado 4 en vez de 3.

Sin embargo, (A,B) y (B,A) sí son equilibrios de Nash. En (A,B), por ejemplo, la empresa 1 gana sólo 1, pero está contenta, porque dado que la empresa 2 ha elegido B, elegir A es lo mejor que podía haber hecho ella. Si hubiera elegido B también ahora tendría 0 en vez de 1.

Hay otro equilibrio de Nash en estrategias mixtas, con un resultado de (2,2), resultado de combinar los dos equilibrios en estrategias puras al 50%.

Ahora el juego se repite dos veces. Un equilibrio perfecto en subjuegos requerirá que cada vez que se juega tengamos un equilibrio de Nash. Esto quiere decir que los jugadores deben quedar satisfechos, a posteriori, con sus elecciones, a la vista de lo elegido por el oponente.

Sólo hay una posibilidad de alcanzar un equilibrio si se juega dos veces, y ésta posibilidad implica rotación. Una de las veces el resultado debe ser (A,B) y la otra (B,A). Ambas son equilibrios de Nash, y combinadas (da igual el orden) se garantiza un resultado simétrico.

Dado que hay un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, éste se puede usar en una de las partidas, o en las dos.

Todos los posibles resultados están en la Figura 7.7.

El número de posibles resultados se ha multiplicado, respecto de las que había al jugar el juego una sola vez.

Cabe preguntarse por qué los jugadores no se quedan en (A,A) las dos partidas, obteniendo mayor beneficio medio. Recordemos que los jugadores *no* se coordinan. Recordemos también que no deben arrepentirse de lo que han elegido en ningún momento. Si en el primer o segundo movimiento acabaran en (A,A), los dos se arrepentirían, y cada uno pensaría que podía haber sacado más del juego si hubiera elegido B en lugar de A, eso sí, perjudicando al otro. Ello se debe a que (A,A) no es un equilibrio de Nash.

Cuando el juego se juega tres veces la rotación ya no vale, porque ambos jugadores deben ganar lo mismo al final. La rotación vale para dos partidas, pero ¿y la tercera partida? La tercera partida, en realidad la primera de las tres, debe ser (A,A), si se pretende maximizar el beneficio medio y que este sea simétrico (igual para los dos jugadores). Después de esa primera partida, se hace la rotación: (A,B) y (B,A) o al revés.

Cualquier otra solución simétrica tiene un resultado peor (p. 214). Si se hace la rotación antes, en las dos primeras partidas, en la tercera y última ambos jugadores se pueden sentir tentados a elegir B y así engañar al otro sin que éste tenga la oportunidad de responder.

El libro explica las estrategias (p. 215). Los jugadores tienen que adoptar una estrategia sin saber seguro lo que hará el otro aunque, dado que el juego se repite, pueden responder en la siguiente jugada a lo que han observado que el ponente ha hecho en esta.

La empresa 1 elige A en la primera ronda, esperando que la empresa 2 haga lo mismo. En la segunda jugada, si la empresa 2 ha cumplido (A,A) –o si ambas han engañado (B,B)-, la empresa 1 sigue con el plan de rotación: elige A en la segunda ronda y B en la tercera. Si la empresa 1 se ha visto engañada con (A,B), en la segunda y tercera ronda irá a B, porque ya no confiará en la empresa 2. Si la empresa 1 es la que engaña en la primera ronda, debe saber que la empresa 2 responderá eligiendo ya B siempre que pueda, y en ese caso lo mejor es no elegir B y responder siempre con A.

En suma, cada jugador conoce cuál es la estrategia óptima para los dos, pero si pretende romperla para obtener un beneficio extra a costa del otro (resultado no simétrico), el jugador engañado responde reajustando su estrategia inicial. El resultado es peor que si respetamos el plan optimizador. Es lo que se conoce como “Estrategia del disparador” (o del gatillo).

En definitiva, el juego “Oportunidades de mercado”, tiene dos posibles equilibrios de Nash, pero el resultado real es incierto cuando se juega una sola vez. Se hace más previsible si se repite, de forma que sabremos el resultado en cada ronda, ya que el juego se juega ahora *en función del promedio de resultados y los jugadores identifican la estrategia óptima y vigilan para que se cumpla*.

Otra cosa interesante es que si el juego se repite 101 veces, como se dice en la página 216, lo mejor es adoptar una estrategia (A,A) siempre, hasta los dos movimientos finales. De esa manera obtendremos el máximo beneficio conjunto posible, y el resultado será un equilibrio de Nash en el sentido de dejar satisfechos a ambos contendientes.

La Figura 7.8 representa las ganancias medias que se pueden alcanzar combinando los posibles equilibrios del juego de la Figura 7.6. Una de las esquinas es (1,1) y no (0,0) porque cualquiera de los dos jugadores puede asegurarse un resultado de 1 con sólo elegir A y mantenerse ahí durante las repeticiones del juego, haga lo que haga el otro. Y viceversa. Obsérvese que el punto (1,1) permite trazar un *ángulo recto* sobre él al unirse a los otros dos resultados del juego de una sola ronda. Dada la exigencia de simetría, nos interesan los puntos situados en un segmento que uniera (1,1) con (3,3), y cuando más cerca de (3,3) mejor.

El teorema de tradición oral (*folk theorem*) dice esto: podemos alcanzar cualquier punto de ese rectángulo combinando en la proporción adecuada resultados factibles y racionales del juego de una sola ronda, y el resultado será un equilibrio perfecto en subjuegos.

¿qué sucedería si la (A, A) fuera (5,5)--> en ese caso, ¿los dos equilibrio de Nash no serían eficiente según Pareto, no? y podría darse que eligieran (a,a)

El equilibrio de Nash, en los juegos que se repiten, cambia en un sentido importante: el equilibrio de Nash es un conjunto de acciones, una para cada fase del juego, que nos deja satisfechos a posteriori. En una fase del juego aislada puede que no sea un equilibrio de Nash en sentido estático, pero no hay que juzgar cada eslabón de la cadena, sino la cadena en conjunto. Esto hace más difícil pensar estos juegos.

Los óptimos de Pareto se alcanzan su a ellos nos llevan estrategias dominantes. Si son equilibrios de Nash pueden ser el resultado del juego, o puede que no. Es irracional no ir a un óptimo de Pareto como el del dilema del prisionero, pero los juegos no-cooperativos descartan la cooperación, por definición, y los óptimos de Pareto que no son solución del juego solo pueden alcanzarse cambiando las reglas, es decir, permitiendo la cooperación. Pero todo esto se refiere a los juegos estáticos.

En un juego que se repite y en el que es posible la cooperación quizá podríamos situarnos en el óptimo de Pareto todo el tiempo. Pero ya veremos que los juegos cooperativos tienen un problema intrínseco, que es el de la estabilidad de los acuerdos.

¿Por qué el valor esperado es 2?

Es lo mismo que calcular la función de pagos de cada jugador:

| | Jugador-columna | | |
|---|---|---|---|
| Jugador-fila | | Estrategia 1c | Estrategia 2c |
| | Estrategia 1f | p q | p (1-q) |
| | Estrategia 2f | (1-p) | q (1-p) (1-q) |
| | | | |

La *función de pagos* del jugador-fila será:

$$FP_f = F_{11}pq + F_{12}p(1-q) + F_{21}(1-p)q + F_{22}(1-p)(1-q)$$

$$FP_f = 3(1/2)(1/2) + 1(1/2)(1/2) + 4(1/2)(1/2) + 0(1/2)(1/2) = 8/4 = 2$$

La *función de pagos* del jugador-columna será:

$$FP_c = C_{11}pq + C_{12}p(1-q) + C_{21}(1-p)q + C_{22}(1-p)(1-q)$$

### 7.6.- <u>Juegos repetidos un número indefinido de veces: Estrategias y ganancias</u>

Los mejores ejemplos de juegos que se repiten un número infinito de veces tienen que ver con empresas.

Para ello se necesita que al menos dos jugadores se comporten como si fueran a vivir eternamente.

Una estrategia en un juego repetido un número infinito de veces en cada repetición debe especificar una opción para cada historia posible, lo que se hace muy complejo.

Estudiamos juegos repetidos un número infinito de veces que se pueden resolver con programas estratégicos de pocas soluciones.

Un ejemplo del tipo de estrategia más simple posible para el juego de mercado de Cournot repetido es

> en todas las rondas: enviar 16 Uds. al mercado después de cualquier historia posible

La estrategia incondicional: hacer lo mismo con frecuencia infinita, es la estrategia más simple posible.

Una estrategia pequeña, como 16, se puede programar con una sola instrucción.

Las rotaciones también se pueden programar; hacen falta tantas instrucciones como pasos hay en la rotación.

Si se duda entre enviar 16 o 20 Uds., la estrategia correspondiente será:

> primera ronda y todas las rondas impares que le siguen: enviar 16 unidades después de cualquier historia posible
>
> segunda ronda y todas las rondas pares que le siguen: enviar 20 unidades después de cualquier historia posible

Es importante aquí la estrategia del disparador (…)

## 7.7.- <u>Juegos de mercado de Cournot repetidos un número infinito de veces</u>

Dos empresas e1 y e2, llevan sus productos, sustitutivos perfectos, al mercado, periodo tras periodo.

Cada periodo la demanda de mercado es:

$$P=130-Q$$

P es el precio de mercado

Q es la cantidad de mercado.

Cada una produce a un coste medio y marginal constante, c=$10

Si solo juegan una vez, el equilibrio de Cournot es

$$x_1^* = x_2^* = 40$$

El precio de mercado es $50 y el margen de beneficio para cada empresa es $40. Cada empresa obtiene unos beneficios de $1.600→info que se indica con el punto C (Cournot jugado una vez)

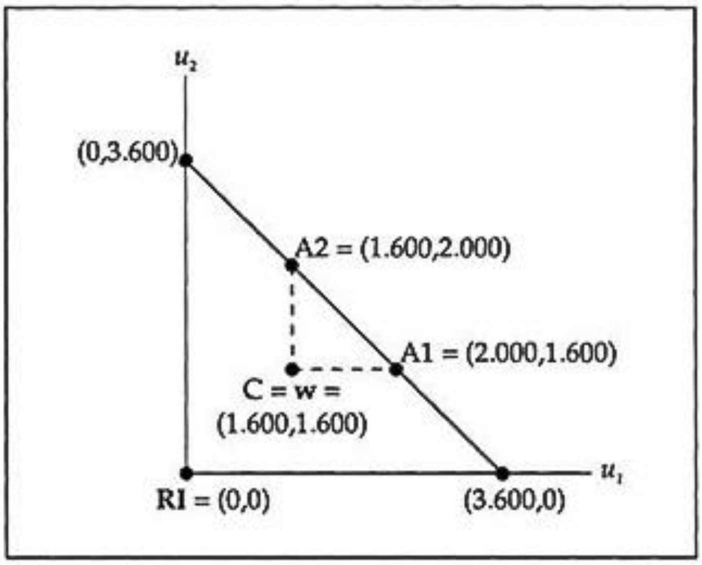


**Figura 7.9. Teorema de tradición oral: juego de mercado de Cournot jugado un número infinito de veces.**

La solución de monopolio de una sola ronda es mucho más rentable ya que restingiría la producción a 60 uds, fijaría el precio en $70, su margen de beneficio estaría en $60 y se obtendrían beneficios de $3.600:

recta: u1+u2=3.600

Si e1 y e2 pudieran alcanzar un equilibrio mejor en el juego repetido un número infinito de veces, podrían obtener beneficios de este calibre→para que se de esta situación se debe repetir el juego infinitas veces, luego la solución del juego de mercado repetido un número finito de veces es el equilibrio de Cournot.

Pero el equilibrio de Cournot de una ronda no es el único equilibrio del juego repetido un número infinito de veces

(…) 222 hasta 228

El teorema de tradición oral para juegos repetidos un número infinito de veces se aplica con más fuerza en la competencia de Bertrand; solo que en esta, el equilibrio del juego de una sola ronda y el punto de referencia de la racionalidad individual coinciden.

El teorema de tradición oral proporciona un conjunto de equilibrios mayor por los que luchar, el triángulo de vértices (3.660, 0), (0, 3.600) y (0, 0).

Para obtener los beneficios (1.800, 1.800) un número infinito de veces:

| | |
|---|---|
| primera ronda: | enviar 30 unidades al mercado |
| ronda $T$−ésima: | enviar 30 unidades al mercado después de cualquier historia posible en la que las dos empresas han enviado 30 unidades al mercado; en caso contrario, enviar 40 unidades al mercado de ahora en adelante |

Esto es un equilibrio para cualquier factor de descuento mayor que 0,5, algo bastante plausible bajo la interpretación de R (factor de descuento) como probabilidad de continuación si los jugadores son neutrales ante el riesgo.

Si la probabilidad de que el juego se repita mañana es superior al 50%, la mitad del mercado hoy y la mitad del mercado mañana es mejor que todo el mercado hoy y nada en adelante.

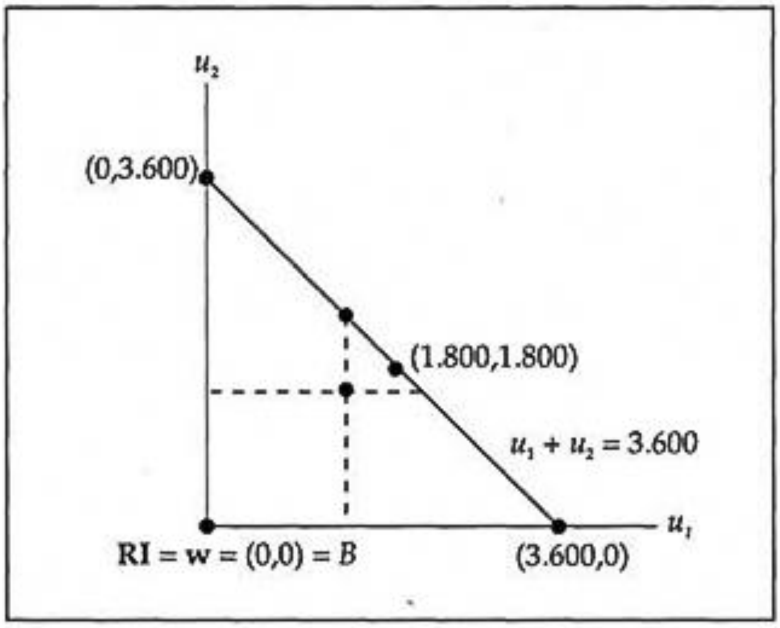


**Figura 7.10. Posibilidades de ganancias, juego de mercado de Bertrand jugado un número infinito de veces.**

Las empresas que compiten día a día durante un siglo se acercan al caso de infinitas repeticiones.

Cada vez que los fundamentos económicos cambian, se desplaza la curva de demanda o cambian los costes, las posibilidades de beneficio y el conjunto de equilibrios del juego repetido un número infinito de veces también cambian.

El problema más complejo es coordinarse sobre un cantidad infinita de equilibrios. Ejemplo Kellog's

**7.8.- <u>Liderazgo en precios en la industria de los cereales para desayunar:</u>**

1980 USA, defensores comida sana, Kellogg y Post inventan los cereales para desayunar. Fundan sus compañías y les dan sus nombres. Otras dos también hicieron lo mismo y consiguieron importantes cuotas de mercado. Obtuvieron todas muchos beneficios compitiendo, jugando un juego repetido un número infinito de veces, uno de los cuales corresponde a una política de precios de equilibrio.

En la vida real existe una restricción al teorema de tradición oral para juegos repetidos un número infinito de veces.

Una ley federal de USA, Acta de Sherman y legislación subsiguiente) ha prohibido monopolizar, o intentarlo, un mercado. El gobierno se encarga de demostrar que las empresas han tratado de conspirar para llegar a monopolizar el mercado.

El comportamiento del teorema de tradición oral no se puede considerar una violación de las leyes de defensa de la competencia. Pero las compañías con grandes horizontes temporales se mueven en la frontera entre la legalidad y la ilegalidad.

Si las empresas de una industria llegan a la solución de que un juego repetido infinitas veces proporciona beneficios de monopolio, cada vez que cambie uno de los parámetros económicos, como los costes o las preferencias de los consumidores, los equilibrios del juego repetido un número infinito de veces también cambiará →las empresas necesitarán un mecanismo para el cambio; si este falla acabarán en el equilibrio de una sola ronda con beneficios bajos para todos.

Esta es la solución que se dio para la industria de cereales para el desayuno, liderazgo en precios, bajo la cual, el líder en  precios se encarga de la política de precios de la industria cuando varía algún parámetro económico. Los miembros de la industria deben adaptarse a los precios del líder para ponerlos correctos y que los beneficios de la industria sean los más altos posibles.

Kellogg's ha sido el líder en precios de la industria de cereales para el desayuno, número uno en cuota de mercado con más del 40% de las ventas. Ha marcado siempre las subidas de precios, incluso cuando algunos se han desmarcado y no han seguido al líder, gastando entonces más en publicidad y esperando a que los demás se ajustaran a la subida de precios.

Este liderazgo en precios ayudó al sector a disfrutar de márgenes de beneficios muy por encima de las tasas medias de beneficio de sus activos.

La comisión federal de comercio puso un pleito contra las empresas del sector, sin evidencia de conspiración malévola, pero alegando de que actuaban como monopolio compartido… el caso terminó politizándose… el juez desestimaría todos los cargos contra las compañías de cereales y Kellogg's y sus seguidores en precios continúan obteniendo impresionantes benenficios.

## Resumen

1. Una relación estratégica que tiene lugar más de una vez recibe el nombre de juego repetido. Los juegos repetidos son más complicados que los juegos de una sola ronda, de los cuales están compuestos.
2. El espacio de estrategias de un juego prolifera cuando el juego se repite. Un juego $2 \times 2$ jugado dos veces es $32 \times 32$ en forma normal.
3. La repetición crea subjuegos. La perfección en subjuegos es una poderosa condición suficiente para la solución de un juego repetido.
4. Una estrategia de disparador se compone de dos partes: una fase inicial, normalmente deseable, y una fase de castigo, que no lo es.
5. Un juego de suma cero repetido sigue siendo un juego de suma cero. Sus posibilidades de ganancias no aumentan con la repetición.
6. Según el teorema de Selten, si un juego con un único equilibrio se repite un número finito de veces, su solución es que cada una de las veces se juega ese equilibrio.
7. Los juegos de suma variable con múltiples equilibrios poseen grandes conjuntos de equilibrios perfectos en subjuegos. Las ganancias en un juego repetido se miden como la ganancia media por repetición del juego.
8. Según el teorema de tradición oral para juegos repetidos un número finito de veces, si un juego de una sola ronda con múltiples equilibrios se repite un número suficiente de veces, se puede aproximar cualquier vector de ganancias factible e individualmente racional con la ganancia media de un equilibrio perfecto en subjuegos.
9. Los miembros de la OPEP parecen estar jugando un juego repetido un número finito de veces en el mercado mundial de petróleo.
10. Dos o más jugadores actuando como si estuvieran jugando un juego de por vida constituyen un juego repetido un número infinito de veces. Las ganancias en un juego repetido un número infinito de veces se descuentan de acuerdo con el tiempo o con la incertidumbre.
11. La repetición infinitas veces del equilibrio de una sola ronda del juego de mercado de Cournot es un equilibrio perfecto en subjuegos. Este juego repetido un número infinito de veces tiene infinitos equilibrios. Algunos de estos equilibrios corresponden a precios de monopolio.
12. Las empresas en Estados Unidos pueden chocar con la normativa sobre defensa de la competencia a consecuencia del teorema de tradición oral para juegos repetidos un número infinito de veces, incluso cuando no hayan conspirado para monopolizar el mercado.

## Problemas

1. **Demuestre que el juego de mercado de Cournot con dos jugadores (capítulo 5) jugado dos veces tiene un único equilibrio. Demuestre también que el dilema de los presos con dos jugadores (figura 7.3) jugado tres veces tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos.**

Consideremos para empezar el juego de mercado de Cournot 3x3 de la Figura 5.1, página 138. En todos los subjuegos finales el único equilibrio en subjuegos paga (1600, 1600). Añadiendo esto a los resultados de la matriz de la Figura 6.10 tenemos:

| Empresa 2 / Empresa 1 | $x_2 = 30$ | $x_2 = 40$ | $x_2 = 60$ |
|---|---|---|---|
| $x_1 = 30$ | (3400, 3400) | (3100, 3600) | (2500, 3400) |
| $x_1 = 40$ | (3600, 3100) | (3200, 3200) | (2400, 2800) |
| $x_1 = 60$ | (3400, 2500) | (2800, 2400) | (1600, 1600) |

El único equilibrio de Nash en esa matriz está en el centro, en (3200,3200). Cada empresa produce 40 unidades cada período, ganando $3200 durante los dos períodos del juego.

Consideremos ahora el juego 2x2 del Dilema del Prisionero jugado tres veces de la Figura 7.3, página 208, jugado tres veces. En cada subjuego final el único equilibrio perfecto en subjuegos ofrece (2, 2). Añadiendo esto a los pagos o resultados en la matriz para un juego de una sola ronda tendremos (Figura 7.4, página 209):

| Jugador 2 / Jugador 1 | No confesar | Confesar |
|---|---|---|
| No confesar | (5,5) | (2,6) |
| Confesar | (6,2) | (4,4) |

Este es el juego que los jugadores enfrentan en la segunda ronda. Su único equilibrio tiene como resultados (4, 4) mediante las estrategias (confesar, confesar). Añadiendo (4, 4) a la matriz de resultados de una sola ronda tendremos:

| Jugador 2 / Jugador 1 | No confesar | Confesar |
|---|---|---|
| No confesar | (7,7) | (4,8) |
| Confesar | (8,4) | (6,6) |

Vamos hacia atrás, y esta es la matriz a la que se enfrentarían los jugadores en la primera partida. Su único equilibrio tiene como resultado (6,6) mediante las estrategias (confesar, confesar). Con esto hemos construido el equilibrio perfecto en subjuegos pedido.

¿Por qué solamente hay un equilibro de Nash en el centro (3200,3200) cuando cada empresa produce 40 unidades en cada periódo? y no hay tres equilibrios de Nash en (3400,3400) cuando cada empresa produce 30 unidades y otro en (1600,1600) cuando ambas producen 60 unidades?

Señale las casillas para buscar los equilibrios, y solo le saldrá ese, el central.

**2. Hallar las ganancias medias del equilibrio perfecto en subjuegos de Oportunidad de mercado (figura 3.2) jugado dos veces.**

Hay seis posibles trayectorias de equilibrios perfectos en subjuegos:

(1 entra, 2 se queda fuera) dos veces, con resultados medios (200, 0)/2 = (100, 0)

(1 quedarse fuera, 2 entrar) dos veces, con resultados medios (0, 200)/2 = (0, 100)

Rotar entre (1 entrar, 2 quedarse fuera) y (1 quedarse fuera, 2 entrar), con resultados medios (100, 100)/2 = (50, 50)

Jugar la estrategia mixta dos veces, con resultados (0, 0)

Rotar entre la estrategia mixta y (1, entra, 2 quedarse fuera), con resultado (50, 0)

Rotar entre la estrategia mixta y (1 quedarse fuera, 2 entrar), con resultado (0, 50)

Por tanto hay 6 posibles equilibrios perfectos en subjuegos en conjunto.

**3. Encuentre otra estrategia que alcance las ganancias medias (2,5, 2,5) en Oportunidades de mercado jugado dos veces. ¿Cómo afectaría un factor de descuento $R < 1$ en lo que las empresas piensan acerca de rotar entre las dos oportunidades de mercado?**

Simplemente invertimos la rotación de la que se empleó en el epígrafe 7.5. Para la empresa 1 la estrategia es

primero, ir a B

segundo, ir a A incondicionalmente

Para la empresa 2 la estrategia es:

primero, ir a A

segundo, ir a B incondicionalmente

Esto rinde un resultado de (2,5, 2,5).

Supongamos ahora que las empresas aplican el factor de descuento a los resultados. Tendremos que $4 + 1R > 1 + 4R$, ya que $3 > 3R$, debido a que $R < 1$. Por tanto, una empresa preferirá la rotación que te envía primero al nicho B primero.

Estamos pensando en un juego que se repite y las empresas rotan.

La pregunta es ¿da igual el orden en la rotación?

En un caso muy simple del juego sí, pero en general no.

El juego se repite. La primera vez se juega en $t = 0$ y la segunda vez en $t = 1$.

El jugador 1 puede obtener 1 en $t = 0$ y 4 en $t = 1$ o al revés. Fijémosnos sólo en él.

Si obtiene 1 en t = 0 y 4 en t = 1 y aplicamos el factor de descuento R para llevar la cantidad obtenida en t = 1 al momento cero, la suma de las ganancias en el momento 0 será 1 + 4R.

Si obtiene 4 en t = 0 y 1 en t = 1 y aplicamos el factor de descuento R para llevar la cantidad obtenida en t = 1 al momento cero, la suma de las ganancias en el momento 0 será 4 + 1R.

Hay que recordar que R < 1

Ocurrirá que 4 + 1R > 1 + 4R. Se puede ver reordenando esa desigualdad: 3 > 3R, dado que R < 1.

Por tanto, al simplificar mucho hemos considerado que los jugadores rotan entre los dos equilibrios de Nash en estrategias puras en cualquier orden, pues da igual. Pero si fuéramos rigurosos con el tratamiento temporal de las cantidades no daría igual -a los jugadores- ganar 4 al principio o al final.

Esa observación es interesante como aviso general para los juegos secuenciales o repetidos en los que pasa el tiempo entre unos movimientos y otros. En ellos el cálculo correcto de las ganancias totales exige usar factores de descuento, por lo que éstos tienen un papel en la solución del juego, y puede llegar a ser determinante. En el libro se ve algún caso (el juego de la negociación entre el novelista y el estudio de cine, en el tema 12, por ejemplo).

**4. Hallar las posibilidades de utilidad media de los equilibrios perfectos en subjuegos en Oportunidades de mercado jugado cuatro veces si las empresas sólo utilizan estrategias puras. ¿Cuánto podemos acercarnos a (3,3) con cuatro repeticiones?**

Primero, tenemos los resultados derivados de la rotación. Si la empresa 1 va a B cuatro veces el pago promedio es (4, 1). Si la empresa 1 va a B tres veces el pago medio es (3(4,1)+(1,4))/4 = (3,25, 1,75). Si la empresa 1 va a B dos veces el pago medio es (2,5, 2,5). Si la empresa 1 va a B una vez el pago es (1,75, 3,25). Si la empresa 1 nunca va a B, el pago promedio es (1, 4). Además de los pagos o resultados derivados de la rotación tenemos otros resultados que se acercan a (3, 3). En particular, consideremos el equilibrio perfecto en subjuegos que implica que las empresas juegan (**A**, **A**) dos veces, y después rotan a (**A**, B) y (B, **A**). Esta estrategia se sostiene por la amenaza creíble de castigar al que se separe de esa trayectoria con el peor equilibrio de una sola ronda en las partidas 1 y 2. El pago o resultado medio es (2,75, 2,75).

La rotación implica que una empresa opta por una opción (A o B) y la otra elige la otra (B o A).

Si sabemos qué hace la empresa 1, ya sabemos lo que hace la 2, si están rotando.

Si la empresa 1 elige B cuatro veces, la empresa 2 estará eligiendo A cuatro veces. El resultado promedio para la empresa 1 es Si la empresa "1" va a "B" 4 veces el pago promedio es (4,1) sería [4(4)+4(1)]/4=16/4+4/4→ (4,1) .

Si la empresa 1 elige B tres veces y A una vez, la empresa 2 estará eligiendo A tres veces y B una vez. Para la empresa 1 el resultado promedio es (3(4,1)+(1,4))/4 = [(3*4+1)/4, (3*1+4)/4] = (13/4, 7/4) = (3,25, 1,75)

Si la empresa 1 elige B dos veces y A dos veces, la empresa 2 estará eligiendo A dos veces y B dos vez. Para la empresa 1 el resultado promedio es (2(4,1)+2(1,4))/4 = [(2*4+1*2)/4, (2*1+2*4)/4] = (10/4, 10/4) = (2,5, 2,5)

Si la empresa 1 elige B una vez y A tres veces, la empresa 2 estará eligiendo B tres veces y A una vez. Para la empresa 1 el resultado promedio es (1(4,1)+3(1,4))/4 = [(4+3)/4, (1+12)/4] = (7/4, 13/4) = (1,75, 3,25)

**5. Compare la situación estratégica a la que se enfrentan los países productores de café con la de los países de la OPEP. ¿Qué grupo de países tiene más probabilidades de estar jugando un número infinito de veces? ¿Quiere decir esto que el mantenimiento del acuerdo de 1993 está garantizado?**

Los países de la OPEP y Rusia juegan como si fueran dos empresas en un mercado de tipo Cournot, con la cantidad de petróleo exportado como base de las estrategias. Los países de la OPEP tenían establecidas cuotas, que violaban continuamente. Aún así, la OPEP era capaz de mantener el precio de mercado por encima de lo que habría sido el nivel de competencia perfecta. Rusia, que no es miembro de la OPEP, se beneficia de ello también. Dado el comportamiento de la OPEP, se podría pensar que su relación con Rusia responde a un juego repetido infinitas veces. El petróleo se agota, pero a una tasa decreciente y acompañado de un incremento de los precios. Entonces, si Rusia es paciente (su tasa de descuento R cercana a 1), preferirá jugar una sucesión de equilibrios en un juego repetido antes que instalarse en un permanente equilibrio de Cournot. Identificar ese equilibrio y jugarlo es un problema de coordinación mayúsculo.

**6. Demuestre que en el juego de mercado de Cournot repetido un número infinito de veces de la sección 7.6, a una empresa no le resulta rentable reducir la producción si las empresas están utilizando el equilibrio de una sola ronda de Cournot periodo tras periodo.**

Ya que el juego es simétrico, basta con considerar una desviación de la empresa 1. Imaginemos que la empresa 1 *aumenta* su producción de 40 a X (el caso de la reducción ya puede verse en la página 223). La empresa 2 produce 40 unidades. El precio de mercado en este período es $P = 130 - 40 - X$. Los beneficios de la empresa 1 este período son:

$u_1 = (130\text{-}40\text{-}X\text{-}10)X = (80 - X)X < 1600$

cuando $X < 40$. Ya que los beneficios bajan en este período, y la estrategia es volver tras cualquier posible historia al equilibrio de Cournot de un juego de una sola ronda en el próximo período, la desviación de la empresa 1 no compensa.

7. **Halle un equilibrio perfecto en subjuegos que proporcione las ganancias de monopolio en el juego de mercado de Cournot de la sección 7.7 (tanto en el juego de una sola ronda como en el repetido un número infinito de veces) si el coste medio es constante e igual a $30. Las dos empresas tienen factores de descuento igual a 0,9. La demanda de mercado es $P = 130 - Q$.**

No tiene por qué saber resolver ese tipo de problemas. En teoría sí debería, recordando lo que estudió en Análisis Económico del Turismo. Para eso están los apuntes complementarios que sustituyen al tema 5, para "recordar" esa materia y poder seguir algunos ejemplos que el libro plantea usando oligopolios como base.

Si quiere saber cómo se resuelven estos problemas mire el documento adjunto -que tiene también en la carpeta dedicada al tema 5 en "documentos para los alumnos"-, si bien yo no dedicaría mucho tiempo a esto ahora. Ahí está planteado, paso a paso, el cómo y el porqué.

Tenemos que $P = 130 - Q$, $c = 30$, $R = 0{,}9$

$u_1 = (130 - Q_1 - Q_2)Q_1 - 30Q_1$ y $u_2 = (130 - Q_1 - Q_2)Q_2 - 30Q_2$

Derivando e igualando a cero cada expresión:

$130 - 2Q_1 - Q_2 - 30 = 0$

$130 - Q_1 - 2Q_2 - 30 = 0$

Funciones de reacción: $Q_1 = (100 - Q_2)/2$ y $Q_2 = (100 - Q_1)/2$. Tenemos que $Q_2 = 100/3 = Q_1$. $P = 190/3$. Margen de beneficio es $100/3$. Beneficio para cada empresa es $10000/9$. Es el equilibrio de Cournot.

El monopolio iguala ingreso y coste marginal, de manera que $130 - 2Q = 30$, de donde $Q = 50$, correspondiendo una cuota de 25 unidades a cada empresa. El precio es $P = 80$, y el beneficio marginal es de 50. El beneficio para cada empresa es $50*25 = 1250$. Por tanto, ese sería el beneficio de monopolio en un juego de una sola ronda.

Cuando el juego se repite un número infinito de veces surge la posibilidad de traicionar el acuerdo. La empresa 1 puede maximizar su beneficio considerando la producción de la otra empresa como fija: $u_1 = PQ_1 - cQ_1 = (130 - Q_1 - 25)Q_1 - 30Q_1 = 75Q_1 - Q_1^2$. Derivando e igualando a cero, $75 - 2Q_1 = 0$, de donde $Q_1 = 37{,}5$. Tendremos $u_1 = 2812{,}5 - 1406{,}25 = 1406{,}25$.

Visto de otra forma: con un nuevo precio de equilibrio de $P = 130 - (37{,}5 + 25) = 130 - 62{,}5 = 67{,}5$, el nuevo beneficio para la empresa 1 es $37{,}5*37{,}5 = 1406{,}25$.

La empresa 1 sólo conseguirá ese beneficio extra *un período*, porque la empresa 2 responderá estableciendo un equilibrio de Cournot eterno.

Recordemos que $[1 + R + R^2 + R^3 + \ldots] = 1/(1-R)$

Tendremos que el valor actualizado de todos los beneficios *con traición* es
$u_1/(1-R) = 1406{,}25 + (10000/9)(R + R^2 + R^3 + \ldots)$
Y recordando la equivalencia anterior:
$u_1/(1-R) = 1406{,}25 + (10000/9)/(1-R) - (10000/9)$

Mientras que *sin traición* es
$u_1/(1-R) = 1250/(1-R)$
$R = 0{,}9$

Por tanto, debe cumplirse que $1406{,}25 + (10000/9)/(1-R) - (10000/9) < 1250/(1-R)$ *para que a la empresa le interese mantenerse fiel al pacto de formar un cártel.*

De donde
$1406{,}25(1-R) + (10000/9) - (10000/9)(1-R) < 1250$

$1406{,}25 - 1250 < 295{,}14R$

$156{,}25 < 295{,}14R$

de donde $R > 0{,}53$. Es el caso, pues $R = 0{,}9$.

Este problema es un ejemplo adicional al que se plantea en la página 225. *La idea es esta*:

Las empresas pactan formar un monopolio, y obtienen un beneficio de monopolio -a medias- para siempre: 1250 cada período.

Si traiciona una de ellas, obtiene 1406,25 un período, y el resto de períodos obtiene (10000)/9. *<u>Vamos a poner 1400 y 10000 para simplificar los números</u>*.

El R sirve para actualizar cantidades (VA). Actualicemos y sumemos todo en uno y otro caso (redondeamos los números para mostrarlo):

1. No traiciona:

| | | | |
|---|---|---|---|
| t = 0 | t = 1 | t = 2 | t = 3 .... |
| 1250 | 1250 | 1250 | 1250 |

$VA_1 = 1250 + 1250R + 1250R^2 + 1250R^3$
$VA_1 = 1250/(1-R)$

2. Traiciona:

| | | | |
|---|---|---|---|
| t = 0 | t = 1 | t = 2 | t = 3 |
| 1400 | 1000 | 1000 | 1000 |

$VA_2 = 1400 + 1000R + 1000R^2 + 1000R^3$
$VA_2 = 1400 + 1000/(1-R) - 1000$

(Se sustraen 1000 porque $1000 + 1000R + 1000R^2 + 1000R^3 = 1000/(1-R)$, pero no tenemos el primer 1000, así que lo sumamos y lo restamos).

¿Cuándo da igual traicionar que ser fiel? Cuando los dos valores actualizados son iguales $VA_1 = VA_2$, es decir,

1250/(1-R) = 1400 + 1000/(1-R) - 1000

Se despeja de ahí R.

Si ponemos una desigualdad averiguamos si R tiene que ser mayor o menor de un determinados valor para que un VA sea mayor que el otro.

Duda: 1**0000/9 i**magino que sale de Q1*Q2 (100/*100/3) pero no sé muy bien porqué.

Con este problema me lio un poco, **sobre todo** en a partir de la actualización del valor (valor actualizado) u1(1-R)......

**Có**mo se plantea, en pasos, el **procedimiento** de afrontar un problema de este tipo?

Si usted tiene una cantidad de dinero A en un momento del tiempo t y otra cantidad B en un momento del tiempo t+1, debe saber que no puede sumar A y B así, tal cual. Tiene que llevar antes esas cantidades al mismo momento del tiempo. Para ello puede capitalizar A al momento t+1 o actualizar el valor de B al momento t.

Para capitalizar una cantidad de dinero tiene que multiplicarla por uno más el tipo de interés elevado a los períodos de tiempo que A debe saltar hacia adelante: $c(A) = A\ (1+i)^t$, donde i es el tipo de interés y t son los períodos de tiempo a los que se refiere i (por ejemplo, t años e i un tipo de interés anual).

Para actualizar una cantidad tiene que dividir por uno más el tipo de interés elevado a los períodos de tiempo que B debe saltar hacia atrás: $a(B) = B / (1+i)^t$.

En nuestro ejemplo, la capitalización de A implicaría que t = 1. Si actualizáramos B tendríamos que t = 1 también.

Por otro lado, si Ud tiene una serie como esta: $1 + c + c^2 + c^3 + ....$ hasta el infinito, donde c es menor que 1, debe saber que esa serie converge a 1/(1-c), es decir: $1/(1-c) = 1 + c + c^2 + c^3 + ....$

El caso de Cournot es diferente del caso de Bertrand o del caso de Stackelberg.

Las empresas maximizan siempre el beneficio. El beneficio es siempre la diferencia entre ingresos y costes.

Los ingresos son siempre la cantidad vendida por el precio. Una de esas dos variables (precio o cantidad) viene dado por la función de demanda. Normalmente es el precio (función inversa de demanda).

Sustituimos todo: función inversa de demanda, cantidad (tal cual) y costes→ Ya tenemos la función de beneficios explicada por la cantidad, es decir, B(x).

Hay que tener en cuenta que las dos empresas ofrecen el mismo producto, por lo que la función de demanda del mercado responde a la cantidad total lanzada al mercado: x = x1 + x2.

En la función de beneficios de la empresa 1 todas las cantidades son x1, excepto las que entran a través de la función de demanda inversa, que son x = x1 + x2.

Obviamente x2 es un parámetro en la función B1(x1) de la empresa 1, y x1 es un parámetro en B2(x2) de la empresa 2.

Una vez tienes las dos funciones de beneficio maximizas: las derivas e igualas a cero. Obtienes las funciones de reacción. Son funciones en las que x1 depende de x2 y viceversa.

Forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que se resuelve. Y ya está.

Por otro lado, 10000/9 viene de sustituir Q1 = Q2 = 100/3 en cada función de beneficios u1 y u2. Tendremos que u1 = 10000/9 y u2 = 10000/9

Tenga en cuenta que uso Q en vez de x y u en vez de B porque la notación del libro es esa.

**8. Suponga en el problema 7 que la empresa 1 tiene un coste medio igual a $10 y la empresa 2 tiene un coste medio igual a $30. Halle el equilibrio de una sola ronda de Cournot. ¿Cuáles son las posibilidades de beneficio en este juego si se repite un número infinito de veces?**

Si los costes medios difieren el juego pasa a ser asimétrico.

Tenemos que $P = 130 - Q$, $\boxed{C1=10}$ $c_2 = 30$, $R = 0,9$

$u_1 = (130 - Q_1 - Q_2)Q_1 - 30Q_1$ y $u_2 = (130 - Q_1 - Q_2)Q_2 - 10Q_2$

Derivando e igualando a cero cada expresión:

$130 - 2Q_1 - Q_2 - 30 = 0$

$130 - Q_1 - 2Q_2 - 10 = 0$

Funciones de reacción: $Q_1 = (100 - Q_2)/2$ y $Q_2 = (120 - Q_1)/2$. Tenemos que $Q_2 = 140/3$ y $Q_1 80/3$. $P = 170/3$.

Las empresas pueden crear mediante un cártel un monopolio virtual, y maximizar beneficios conjuntos ($u_1 + u_2$), pero con un reparto no igualitario de los mismos. Cualquiera de las dos empresas puede amenazar a la otra con romper el acuerdo y volver a una situación de Cournot.

**9. Halle las posibilidades de beneficio en el problema 7 si las empresas compiten a la Bertrand. Si la empresa 1 es el líder en precios, ¿qué precio debería escoger?**

Este problema se excluye

**10. Se le convoca como experto por el abogado de una empresa en un caso como el de *Estados Unidos contra Kellogg's et al.* Su trabajo es convencer al jurado de que su cliente no ha hecho nada malo al actuar como un líder en precios. ¿Por qué querrá la empresa que usted declare? ¿En qué debería centrarse su testimonio?**

La clave del testimonio del abogado para la defensa es convencer al jurado de que su defendido no participó en una conspiración para monopolizar el mercado siguiendo la trayectoria del precio de los competidores. habría que convencer al juez de que seguir el precio del rival es parte del equilibrio de un juego, es decir, la mejor respuesta que el defendido podía dar al ambiente competitivo en el que se desenvolvía su actividad.

La teoría de juegos puede servir como argumento en los tribunales, y así se hizo en el caso de Estados Unidos contra Kellogg's.